平成 27 年度

金沢大学理工学域編入学試験

数物科学類　数学コース

（注　意）

1　問題紙は指示のあるまで開かないこと．

2　問題紙は 3 枚（表紙を含む），答案用紙は 5 枚，下書き用紙は 2 枚である．

3　問題は 5 問である．答えは，すべて答案用紙の指定欄に記入すること．

4　白紙の答案用紙でも，受験番号を記入して提出すること．

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること．

金沢大学理工学域 編入学試験	問　　題
科　目　名	志願学類・コース
専門科目	数物科学類 数学コース

[1] $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x + 4y - z = 0 \right\}$ と線形変換

$$f : \boldsymbol{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であることを示し，その基底を一組求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} \in W$ のとき $f(\boldsymbol{x}) \in W$ となることを示せ．

(3) (2) により，f の定義域を W に制限することにより，線形変換

$$g : W \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x}) \in W$$

ができる．この変換 g の (1) で選んだ W の基底に関する表現行列を求めよ．

[2] 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(4) $B = (\alpha E - A)(\beta E - A)^{-1}$ とおく．ただし E は 3 次の単位行列，α と β は A の固有値とは異なる実数とする．B を対角化せよ．

[3] 次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 3x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$

金沢大学理工学域 編 入 学 試 験	問　　　題
科　　目　　名	志願学類・コース
専 門 科 目	数 物 科 学 類 数 学 コ ー ス

［4］ 次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}$ 上の滑らかな関数 $f(x)$ がつねに $f''(x) \geqq 0$ を満たすならば，任意の $a, b \in \boldsymbol{R}$ と任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$f\big((1-t)a+tb\big) \leqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ 上の滑らかな関数 $g(x_1, x_2)$ が任意の点 $\mathrm{P}=(p_1,p_2)$ と任意のベクトル $v=(v_1,v_2)$ に対して

$$\frac{\partial^2 g}{\partial {x_1}^2}(\mathrm{P}){v_1}^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathrm{P})v_1 v_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial {x_2}^2}(\mathrm{P}){v_2}^2 \geqq 0$$

を満たすならば，任意の 2 点 $\mathrm{P}=(p_1,p_2)$, $\mathrm{Q}=(q_1,q_2)$, および任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$g\big((1-t)\mathrm{P}+t\mathrm{Q}\big) \leqq (1-t)g(\mathrm{P})+tg(\mathrm{Q})$$

が成り立つことを示せ．

［5］ 有界閉領域 D, E を

$$D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} \leqq x^2+y^2 \leqq x\right\},$$
$$E=\left\{(r,\theta)\in\boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq r \leqq \cos\theta\right\}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 写像 $T:\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を

$$T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とする．$(r,\theta)\in E$ のとき $T(r,\theta)\in D$ であることを示せ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．