

問題用紙

専攻名	数物科学専攻・数学コース(一般選抜)	
試験科目名	数学	3枚のうち, 1

次の6問から4問を選択して解答せよ.

[1] 実数 c に対して,

$$A = \begin{pmatrix} 1+2c & -1-2c & 4c \\ -2 & 4 & -4 \\ -1-c & 2+c & -1-2c \end{pmatrix}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ.
- (3) A が対角化可能であるような c の値を求めよ. さらにその c について $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を1つ求めよ.

[2] 実数を成分にもつ行列について, 次の問いに答えよ.

- (1) (3,2) 行列 A と (2,3) 行列 B であって $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるものは存在しないことを示せ.

- (2) (3,2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, (2,3) 行列 B であって $\text{rank } AB = 2$ となるもの, $\text{rank } AB = 1$ となるものをそれぞれ1つずつ挙げよ.

問題用紙

専攻名	数物科学専攻・数学コース(一般選抜)	
試験科目名	数学	3枚のうち, 2

[3] 実数 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対し, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ ならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することを示せ.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ となる実数列 $\{\varepsilon_n\}$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|} = 0$$

を示せ.

[4] 実数 a, b は $0 < a < b$ をみたすとする. 次の問いに答えよ.

(1) $0 < \varepsilon < N$ をみたす実数 ε, N に対して

$$D_{\varepsilon, N} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon \leq x \leq N, a \leq y \leq b\}$$

とおく. 重積分 $\iint_{D_{\varepsilon, N}} e^{-xy} dx dy$ を2通りに計算することにより,

$$\int_{\varepsilon}^N \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \frac{e^{-\varepsilon y}}{y} dy - \int_a^b \frac{e^{-Ny}}{y} dy$$

であることを示せ.

(2) 広義積分 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ は収束し, その値は $\log b - \log a$ となることを示せ.

問題用紙

専攻名	数物科学専攻・数学コース(一般選抜)	
試験科目名	数学	3枚のうち, 3

[5] $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ を正則関数とする. ある $\delta > 0$ が存在して, $|z - w| < \delta$ なるすべての $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$|f(z) - f(w)| < 1$$

が成り立つとする. 次の問いに答えよ.

- (1) 任意の $z \in \mathbf{C}$ と $|w| < \delta$ なる任意の $w \in \mathbf{C}$ に対して $f(z+w) - f(z) = f(w) - f(0)$ となることを示せ.
- (2) 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して $f'(z) = f'(0)$ を示せ.
- (3) 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して $f(z) = f'(0)z + f(0)$ を示せ.

[6] 下に描かれた12個の線分からなる図形 X を考える. 図のように線分上に12個の点 p_1, \dots, p_{12} が与えられている. 次の問いに答えよ.

- (1) X から相異なる4個の点 $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}$ を取り除いてできる図形 $Y = X \setminus \{p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}\}$ を考える. 3つの連結成分をもつ Y の例を2つ挙げよ.
- (2) X から相異なる5個の点 $p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}, p_{j_4}, p_{j_5}$ を取り除いてできる図形 $Z = X \setminus \{p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}, p_{j_4}, p_{j_5}\}$ を考える. 連結となる Z の例を2つ挙げよ.
- (3) (2) で挙げた2つの例が同相であるかどうか判定せよ.

