平成２７年度（１０月期）及び平成２８年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **問 題 用 紙**		
専攻名	数物科学専攻・数学コース（一般選抜）	
試験科目名	数 学	３枚のうち，１

次の６問から４問を選択して解答せよ．

[1] 内積 $(\cdot, *)$ が与えられた実線形空間 V を考える．V の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ はともに長さ 1 とする．V の線形変換 f, g を次のように定義する：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}, \\ g(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} \end{aligned} \qquad (\boldsymbol{x} \in V).$$

次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交している場合，f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と g の核 $\mathrm{Ker}(g)$ の次元をそれぞれ求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立の場合，f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と g の核 $\mathrm{Ker}(g)$ の次元をそれぞれ求めよ．

[2] V を高々2 次の実多項式全体の実線形空間とする．$f \in V$ に対して $Tf \in V$ を

$$Tf(x) = \int_0^1 (x-t)^2 f(t)\,dt$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) T は V の線形変換であることを確かめよ．

(2) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列を求めよ．

(3) T の固有値とそれに対する固有空間を求めよ．

[3] $k > 0$ とする．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1 = k, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $k = 3$ のとき，実数列 $\{a_n\}$ は単調減少列であることを示せ．

(2) 任意の $k > 0$ に対して，実数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．

[4] C^2 級関数 $z = f(x, y)$ に対し，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とするとき，次の式が成り立つことを示せ．

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$

[5] 次の問いに答えよ．ただし $|z|$ は複素数 z の絶対値，i は虚数単位とする．

(1) z を複素数とするとき，方程式 $\cos z = -i$ を解け．

(2) 複素関数 $f(z)$ が複素平面内の領域 D 上で正則であって $|f(z)|$ が定数関数ならば，$f(z)$ は定数関数であることを示せ．

(3) 複素平面上の点 a を中心とし，半径 $R\ (> 0)$ の円周を C，つまり

$$C = \left\{ z \in \boldsymbol{C} \;\middle|\; |z - a| = R \right\}$$

とする．複素関数 $f(z)$ は C とその内部を含む領域上で正則とし，M を C 上における $|f(z)|$ の最大値とする．このとき

$$|f(a)| \leq M$$

を示せ．

平成２７年度（１０月期）及び平成２８年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **問 題 用 紙**		
専攻名	数物科学専攻・数学コース（一般選抜）	
試験科目名	数 学	3枚のうち，3

[**6**] 次で定義される3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面 M を考える：

$$M=\Big\{\big((a+b\cos v)\cos u,(a+b\cos v)\sin u,b\sin v\big)\;\Big|\;0\leq u\leq 2\pi,0\leq v\leq 2\pi\Big\}.$$

ただし a,b は正の定数で $b<a$ とする．次の問いに答えよ．

(1) M の概形を描け．

(2) M 上の曲線 $c_1,\ \ldots,\ c_5$ を

$$\begin{aligned}
c_1&=\big\{(a\cos u,a\sin u,b)\;\big|\;0\leq u\leq 2\pi\big\},\\
c_2&=\big\{\big((a+b)\cos u,(a+b)\sin u,0\big)\;\big|\;0\leq u\leq 2\pi\big\},\\
c_3&=\big\{\big((a-b)\cos u,(a-b)\sin u,0\big)\;\big|\;0\leq u\leq 2\pi\big\},\\
c_4&=\big\{(a+b\cos v,0,b\sin v)\;\big|\;0\leq v\leq 2\pi\big\},\\
c_5&=\big\{(0,a+b\cos v,b\sin v)\;\big|\;0\leq v\leq 2\pi\big\}
\end{aligned}$$

と定義する．$M\setminus(c_1\cup c_2)$, $M\setminus(c_3\cup c_4)$, $M\setminus(c_2\cup c_4\cup c_5)$ の連結成分の個数を求めよ．

(3) M から円周 S^1 への全射連続写像をひとつ与えよ．