

平成 29 年度
金沢大学理工学域編入学試験
数物科学類 数学コース

(注 意)

- 1 問題紙は指示のあるまで開かないこと。
- 2 問題紙は 3 枚 (表紙を含む) , 答案用紙は 5 枚, 下書き用紙は 2 枚である。
- 3 問題は 5 問である。答えは, すべて答案用紙の指定欄に記入すること。
- 4 白紙の答案用紙でも, 受験番号を記入して提出すること。
- 5 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

金沢大学理工学域 編入学試験	問 題
科 目 名	志願学類・コース
専 門 科 目	数物科学類 数学コース

[1] k を実数とする. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2k \\ 1 & 2k & 2 \\ k & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の階数を求めよ.
- (2) A による \mathbf{R}^3 の変換

$$f: \mathbf{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

を考える.

- (i) f が \mathbf{R}^3 の線形変換であることを示せ.
- (ii) f の像 ($\text{Im } f$) の次元が 2 のとき, f の核 ($\text{Ker } f$) の次元と基底の 1 組を与えよ.

[2] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) A を対角化せよ.
- (2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して, 関数 $f(\mathbf{x})$ を $f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ と定めると, $f(\mathbf{x}) \geq 0$ であることを示せ. さらに $f(\mathbf{x}) = 0$ となる $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ を求めよ. ただし ${}^t\mathbf{x}$ は \mathbf{x} の転置を表す.
- (3) $A = B^2$ となる行列 B を求めよ.

金沢大学理工学域 編入学試験	問 題
科 目 名	志願学類・コース
専 門 科 目	数物科学類 数学コース

[3] 次の問いに答えよ.

- (1) $\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$ ($x > -1$) を示せ.
- (2) 実数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ を満たすとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$ を求めよ.
- (3) 実数列 $\{b_n\}$ は有界数列とする. もし $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n$ が収束するならば, $\{b_n\}$ も収束することを示せ.

[4] $f(x, y)$ を C^2 級の実数値関数とする. 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を行ったとき $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ が r だけの関数 ($g(r)$ とする) になるならば, 以下が成り立つことを示せ.

- (1) $f_{xy} = f_{yx}$.
- (2) $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r$.

[5] 次の問いに答えよ.

- (1) 不等式 $\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{\pi}{6}$ を示せ.
- (2) n を自然数とする. 広義積分

$$I_n = \int_1^{\infty} e^{1-t} \frac{1}{t^n} dt$$

は関係式

$$I_1 = \sum_{k=0}^n (-1)^k k! + (-1)^{n+1} (n+1)! I_{n+2}$$

をみたすことを示せ.