平成２８年度（１０月期）及び平成２９年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 問 題 用 紙		
専攻名	数物科学専攻・数学コース（一般選抜）	
試験科目名	数 学	４枚のうち，１

次の問題 [1] 〜 [6] の中から４問を選択して解答せよ．

[1] 4次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ に対して $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$

とする．次の問いに答えよ．

(1) V は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であり，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は V の基底であることを示せ．

(2) 線形写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to V$ を $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ と定める．このとき $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) (2) で求めた行列 A が対角化可能かどうかを調べ，対角化可能ならば対角化せよ．

平成２８年度（１０月期）及び平成２９年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 問　題　用　紙		
専攻名	数物科学専攻・数学コース（一般選抜）	
試験科目名	数 学	4 枚のうち，2

---

[2] V を n 次元実ベクトル空間とし，V^* を V から $\boldsymbol{R}$ への線形写像全体のなす集合とする．このとき，V^* に和とスカラー倍を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f, g \in V^*, x \in V),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \in \boldsymbol{R}, f \in V^*, x \in V)$$

と定めると，V^* は実ベクトル空間となる．次の問いに答えよ．

(1) V の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ に対して，V^* の元 $f_1, \ldots, f_n$ を

$$f_i(v_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

で定める．このとき $\{f_1, \ldots, f_n\}$ は V^* の基底となることを示せ．

(2) V の元 $u_1, \ldots, u_n$ と V^* の元 $g_1, \ldots, g_n$ に対して，行列 $A = \big(g_i(u_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ を考える．このとき，次の (a), (b) は同値であることを示せ．

(a) $\det A \neq 0$.

(b) $u_1, \ldots, u_n$ は 1 次独立 かつ $g_1, \ldots, g_n$ も 1 次独立である．

[**3**] $[0,\infty)$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ は収束することを示せ．

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $[0,\infty)$ 上で一様収束することを示せ．

(3) 関数 $\displaystyle g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $(0,\infty)$ 上で C^1 級であることを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = -\infty$ であることを示せ．

[**4**] xy 平面上の集合 $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 < x+y \leq 1\right\}$ で定義された関数

$$f(x,y) = e^{\frac{x-y}{x+y}} \left(= \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しないことを示せ．

(2) $f(x,y)$ は D 上で有界であることを示せ．

(3) $f(x,y)$ は D 上で広義積分可能であることを示し，広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値を求めよ．

平成２８年度（１０月期）及び平成２９年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 問 題 用 紙		
専攻名	数物科学専攻・数学コース（一般選抜）	
試験科目名	数 学	4 枚のうち，4

[**5**] $D = \boldsymbol{C} - (-\infty, -1]$，即ち D は $\boldsymbol{C}$ から $(-\infty, -1]$ を除いた領域とする．$z \in D$ に対して

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1 + zt}$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $z \in D$ に対して，$m_z = \min_{0 \le t \le 1} |1 + zt|$ とすると $m_z > 0$ であることを示せ．また，$h \in \boldsymbol{C}$ が $0 < |h| < m_z$ をみたすならば，$z + h \in D$ であることを示せ．

(2) f は D で正則で $f'(z) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+zt)^2} dt$ となることを示せ．

(3) $z \in (-1, \infty)$ のとき $1 + z = e^{zf(z)}$ であることを示せ．

(4) D 上で $1 + z = e^{zf(z)}$ が成り立つことを示せ．

[**6**] (X, d) を距離空間とする．ただし，X は空でない集合，d は X 上の距離関数とする．次の問いに答えよ．

(1) X の部分集合 A が開集合であることの定義を述べよ．

(2) X の点 p と正の実数 r に対して，X の部分集合

$$N_d(p; r) = \{x \in X \mid d(p, x) < r\}$$

を考える．この集合が開集合であることを示せ．

(3) $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ X 上で定義された実数値連続関数とする．X の部分集合

$$B = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$$

が開集合であることを示せ．ただし，実数全体の集合には通常の距離を与えるものとする．