平成30年度

金沢大学理工学域編入学試験

数物科学類　数学コース

（注　意）

1　問題紙は指示のあるまで開かないこと．

2　問題紙は４枚（表紙を含む），答案用紙は５枚，下書き用紙は２枚である．

3　問題は５問である．答えは，すべて答案用紙の指定欄に記入すること．

4　白紙の答案用紙でも，受験番号を記入して提出すること．

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること．

金沢大学理工学域 編入学試験	問　　題
科　目　名	志願学類・コース
専門科目	数物科学類 数学コース

[**1**] 次の問いに答えよ.

(1) 線形写像

$$f\colon \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -4 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

の像（$\mathrm{Im}\, f$）と核（$\mathrm{Ker}\, f$）の基底をそれぞれ一組求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; z^2 \geqq x^2 + y^2 \right\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではないことを示せ.

(3) $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geq 3)$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_1$ も 1 次独立であることを示せ.

[**2**] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) ${}^tPAP$ が対角行列となるような 3 次の直交行列 P を一つ求めよ．ただし ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ とおく（${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す）.
集合 $S = \{\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ における，$f(x)$ の最大値と最小値，およびそれらを与える $\boldsymbol{x} \in S$ をすべて求めよ.

(3) $A^5 - 5A^4 + 2A^3 + 9A^2$ を求めよ.

金沢大学理工学域 編 入 学 試 験	問　　題
科　目　名	志願学類・コース
専門科目	数物科学類 数学コース

[3] 次の問いに答えよ.

(1) 任意の非負整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 次の関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(3) (2) の関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で2回微分可能であり，2階導関数 $f''(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

[4] $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ を収束する単調増加数列とし，その極限値を p とする．自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - p_k|$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x)$，$f_3(x)$ の最小値を与える x を求めよ.

(2) $f_{2n+1}(x)$ の最小値を与える点を q_n とするとき，極限値 $\lim_{n \to \infty} q_n$ を求めよ.

[**5**] 実数 t $(0 < t < 1)$ に対して，集合 R_t を

$$R_t = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ t \leqq x + y \leqq 1\}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_{R_t} \frac{dxdy}{x+y}$ の値を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{t \to +0} \iint_{R_t} \frac{dxdy}{(x+y)^{\lambda}}$ が存在するような，実数 λ の範囲を求めよ．