グラフ理論と保型型式の合同関係式

立教大学　杉山健一

保型関数と Ramanujan グラフの間には強い関係があることが知られているが，この講演ではグラフ理論から導かれる，保型関数の Fourier 係数に関する合同関係式を紹介する．N を 12 で割って 1 余る素数とし，$n=(N-1)/12$ とおく．このとき $\Gamma_0(N)$ に関する，重さが 2 の正規化された Hecke eigen cusp forms は $n-1$ 個あることが分かるが，それらを $\{f_1,\cdots,f_{n-1}\}$ とし，その Fourier 展開を

$$f_i=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_i)q^n,\quad a_1(f_i)=1,\quad (q=e^{2\pi iz},\,\Im z>0)$$

とすると，その係数について次の事実が成り立つ．

定理 1. $1+p$ が n の倍数となる素数 $p(\neq N)$ について，$\{f_1,\cdots,f_{n-1}\}$ の p 番目の *Fourier* 係数の積 $\mu_N(p):=\prod_{i=1}^{n-1}a_p(f_i)$ は n で割り切れる．

例 1. $N=37\,(n=3)$ の場合．

p	5	11	17	23	29	41	47
$a_p(f_{37,a})$	-2	-5	0	2	6	-9	-9
$a_p(f_{37,b})$	0	3	6	6	-6	-9	3
$\mu_{37}(p)$	0	-15	0	12	36	81	-27