平成２９年度（１０月期）及び平成３０年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **問 題 用 紙**		
専攻名	数物科学専攻・数学コース（一般選抜）	
試験科目名	数 学	5枚のうち，1

次の問題 [**1**] ～ [**6**] の中から4問を選択して解答せよ．

[**1**] 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の各固有値の固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような正則行列 P と，行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

[**2**] n 次実対称行列 $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ は，その固有値がすべて負の数であり，かつ $i \neq j$ のとき $a_{ij} \geq 0$ であるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 零ベクトルでない任意の列ベクトル $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，${}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{y} < 0$ であることを示せ．ただし，${}^t\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y}$ の転置を表す．

(2) 列ベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ について，$A\boldsymbol{x}$ の成分がすべて0以上ならば，$\boldsymbol{x}$ の成分はすべて0以下であることを示せ．

(3) A の逆行列の成分はすべて0以下であることを示せ．

平成２９年度（１０月期）及び平成３０年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **問 題 用 紙**		
専攻名	数物科学専攻・数学コース（一般選抜）	
試験科目名	数 学	５枚のうち，２

[**3**] $[1,\infty)$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(1 \leq x < 1 + \dfrac{1}{2n}\right) \\ \dfrac{1}{x} & \left(k + \dfrac{1}{2n^k} \leq x \leq k + \dfrac{1}{n^k}, \quad k = 1, 2, \ldots\right) \\ 0 & \left(k + \dfrac{1}{n^k} < x < k + 1 + \dfrac{1}{2n^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots\right) \end{cases}$$

により定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty f_n(x)dx$ が存在することを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty f_n(x)dx$ を求めよ．

[**4**] $f(x_1, x_2)$ を平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の点 (a_1, a_2) の近傍 U で定義された C^2 級の実数値関数とし，$\varepsilon > 0$ に対して $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \bigl(x_1(t), x_2(t)\bigr) \in U$ を $t = 0$ で点 $(a_1, a_2) \in U$ を通る C^1 級の平面曲線 とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 空間曲線 $\mathit{\Gamma}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \longmapsto \Bigl(x_1(t), x_2(t), f\bigl(x_1(t), x_2(t)\bigr)\Bigr) \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，接ベクトル $\mathit{\Gamma}'(0)$ をベクトル $\left(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\right)$ と $\left(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right)$ の 1 次結合として表せ．

(2) 空間内の点 $\mathrm{P}\bigl(a_1, a_2, f(a_1, a_2)\bigr) \in \boldsymbol{R}^3$ の近傍で定義された関数 $F(x_1, x_2, x_3)$ を $F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$ で定義するとき，点 P における F の勾配ベクトル $\operatorname{grad} F(P)$ は (1) の曲線 $\mathit{\Gamma}$ の接ベクトル $\mathit{\Gamma}'(0)$ と直交することを示せ．

(3) V を $\boldsymbol{R}^2$ の領域，$\varphi\colon V \ni (y_1, y_2) \longmapsto (x_1, x_2) = \bigl(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)\bigr) \in U$ を C^2 級の座標変換とする．このとき，関数 $g(y_1, y_2) = f\bigl(\varphi(y_1, y_2)\bigr)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial g}{\partial y_i}$ および $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}$ $(i, j = 1, 2)$ を f の x_1, x_2 に関する偏導関数と φ_1, φ_2 の y_1, y_2 に関する偏導関数を用いて表せ．

[**5**] 次の問いに答えよ．

(1) 複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の曲線 $\gamma\colon z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に対して，積分

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2 + 2iz} dz$$

の値を求めよ．

(2) 正の実数 R に対して $D = \left\{ z \in \boldsymbol{C} \;\middle|\; |z| \leq R \right\}$ とおく．ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は D 上で収束し，正の実数 M に対して D 上で $|f(z)| \leq M$ を満たすとする．このとき，$|c_n| \leq \dfrac{M}{R^n}$ であることを示せ．

(3) 正の実数 M，正の整数 m に対して，整関数 $f(z)$ が $\boldsymbol{C}$ 上で $|f(z)| \leq M|z|^m$ を満たすならば，ある $A \in \boldsymbol{C}$ が存在して，$f(z) = Az^m$ と書けることを示せ．

[6] 次の問いに答えよ.

(1) 位相空間 X の部分集合 K がコンパクトであることの，開被覆を用いた定義を述べよ.

(2) X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を全射な連続写像とする．もし X がコンパクトならば，Y もコンパクトであることを示せ.

(3) $a < b$ を満たす実数 a, b に対して $[a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a \leq x < b\}$ と定め，この形の集合を右半開区間と呼ぶ．$\boldsymbol{R}$ の右半開区間の全体を開基とする位相により $\boldsymbol{R}$ を位相空間と考えるとき，集合 $[0, 1] = \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$ はコンパクトではないことを示せ.